Joyal 31/7 74

Arithmetisation dans le topos

Sur l'existence de structures generiques (= topos classifiantes)
Gavin Wraith a demontrée certaines
J'a theorem presque general

$\mathcal{E}$ avec NNO

$Top/_{\mathcal{E}}$ le cat de topos sur $\mathcal{E}$ avec morph geom.; $\mathcal{F} \to \mathcal{E}$ assumed to be bounded.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E}^{app} \arrow[dl] \\ \mathcal{E} & \end{tikzcd}$$

p.b. existe by Diaconescu.

$Top/_{\mathcal{E}}$ est une 2-cat.

On considère a ajouter a $\mathcal{E}$ certaine structure, e).
anneau; anneau universel est $\mathcal{E}[A] \to \mathcal{E}$

$$\begin{tikzcd} \overset{B}{\underset{\mathcal{F}}{\cap}} \arrow[r, dashed, "\exists ! u"] \arrow[dr] & \mathcal{E}[A] \arrow[d] \\ & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

B un anneau $\exists ! u$ avec $u^*(A) \cong B$.

Espace top. universel n'pas existe. Requirement:
Preserved by geom morph. f^*

Un type de structure est invar par f^*, alors struct generique existe.

Univers arithmetique: Topos ÷ chose qui ne sont pas invariant par f^*

So it is 1) pre-topos
2) Cat libres sur des graphes existe.

(Coproduit, eq. rel. nucleaire)
(Lim finie, image, co-produit, quotient du rel. eq.)

Un cat^F est une monoïde sur

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & F \arrow[dl] \arrow[dr] & & F \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A & & A & & A
\end{tikzcd}
$$

$$F \otimes F \xrightarrow{m} F$$
$$I \xrightarrow{u} F$$

(expliqué par ex. dans Kock-Wraith) Foncteur^H sur F : $F \otimes H \longrightarrow H$

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & G \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A & & A
\end{tikzcd}
$$

$$\frac{G \otimes H \longrightarrow H}{F(G) \otimes H \longrightarrow H} \quad \text{cas unitaires}$$

G : un graph.

$$G \mapsto F(G)$$

On a :

$\varinjlim_{\text{finie}}$ existent (parsque rel. equivalence can be constructed "by induction" (cat. libre)).

NNO $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, nombres algebriques reelles et complexe $\mathbb{A}_R$, $\mathbb{A}_{\mathbb{C}}$.

free algebraic theories.

groupe libre. Every Lawvere theory has free alg's. Etc

Toute f^* between toposes with NNO et une morph de universe geometrique (preserve all the structure) par ex:

$$u^*(\mathbb{A}_{\mathbb{R}}) = \mathbb{A}_{\mathbb{R}}$$

Consider le cat de universe arithm.

Un universe arithmetique $\mathcal{a}$ est une structure algébrique :

$$\mathcal{a} \times \mathcal{a} \xrightarrow{\times} \mathcal{a}$$

$$\vdots$$

Toute .. essentiellement algebrique [Gabriel-theorie]

Peut consider un univ. arithmetique-objet

$\mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{F}$ extension du univers arithmetique

$\mathcal{F}$ de présentation finie

$$\mathcal{F} = \mathcal{U}[x_1, \ldots, x_n, f, \ldots] / \equiv$$

$\mathcal{F}$ est du pres finie. All this is possible for Gabriel theories

Calcul de fractions [[pour obtenir $\equiv$?]].

$\mathcal{E}$ est un topos. Considerons une ext in sense of arith univ

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$$

of presentation finie

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}' \arrow[d, shift right, "u_*"'] & \\ \mathcal{E} \arrow[u, shift right, "u^*"', dashed] \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[ul, bend right, "M"'] \end{tikzcd}$$

Modelle du $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{E}'$ est une functor M tel que

$$\begin{tikzcd} \cdot & \\ \cdot \arrow[u] \arrow[r] & \cdot \arrow[ul, bend right] \end{tikzcd}$$

est commutative.

Generalise le notion du structur alg.

Par exemple. Pour defin un groupe G comm modelle

$$\begin{tikzcd} G_3 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[rr, bend left] & G_2 \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] & G \end{tikzcd} \qquad G_2 = G \times G$$

$$\begin{tikzcd} G_2 \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[r, bend right=60, "m"'] & G & G_3 \arrow[l, shift left=2] \arrow[l] \arrow[l, shift right=2] \end{tikzcd}$$

Demander $G_2 \xrightarrow{[p_1, p_2]} G \times G$ [[i.e. invert it [Σ^{-1}] when forming $\mathcal{F}$]].

Ajoutant all this to $\mathcal{E}$ to get $\mathcal{F}$.

Anneau local, par ex.

$$\begin{tikzcd}
 & A\times A \arrow[r, "m"] \arrow[dl, "p_1"'] & A \\
A & C \arrow[u, hook] \arrow[r] \arrow[dl] & 1 \arrow[u] \\
U \arrow[u, hook] & &
\end{tikzcd}$$

axiome : $U \vee (1+U) \hookrightarrow A$ est iso.

et $\neg(1=0)$ (exprimer par dire que le noyau est égal à $\emptyset$

est donc une structure arithmétique.

On peut exprimer "être un groupe de torsion".

Introduire G groupe abélien. Construire $T(G)$ sous groupe de torsion

$$T(G) \hookrightarrow G$$

demande être iso.

$[\![\, T(G)$ defined using $\mathbb{N}$ $]\!]$?

<u>Théorème</u> $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ est de présentation finie ; alors il existe topos $\mathcal{E}[\mathcal{F}]$ et un modèle M

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}[\mathcal{F}] \arrow[d] & \\
\mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[ul, "M"']
\end{tikzcd}$$

tel que pour tout $\mathcal{F} \xrightarrow{M'} \mathcal{E}'$ $\qquad$ $\mathcal{E}'$ $\mathcal{E}$-topos

il $\exists!$ $\mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{E}[\mathcal{F}]$.

<u>Démonstration</u> est très simple. Considérons les $\mathcal{F}$ pour lesquelles $\mathcal{E}[\mathcal{F}]$ existe :

$$\mathcal{C} = \{ \mathcal{F} \mid \underset{\mathcal{F} \nearrow M}{\mathcal{E}[\mathcal{F}]} \text{ existe} \}$$

Alors

1) Demontre que si $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{G} \in \mathcal{C}$, alors

$$\mathcal{F} \coprod_{\mathcal{E}} \mathcal{G} \in \mathcal{C}$$

(dans le cat. de univers arithm.).

C'est claire "by adjointness":

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{E}[\mathcal{F}] \times_{\mathcal{E}} \mathcal{E}[\mathcal{G}] & \\
\mathcal{E}[F] \arrow[ur, "\text{im inv.}"] & \mathcal{F} \coprod_{\mathcal{E}} \mathcal{G} \arrow[u, dotted] & \mathcal{E}[G] \arrow[ul] \\
 & \mathcal{F} \quad \mathcal{G} \arrow[ul] \arrow[u] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

(prod fibr. dans cat du topos et morph geo

vérification du propr. universelle est facile.

2) Demontre que $\mathcal{C}$ est fermee sur quotient

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}[\mathcal{F}] \arrow[d] & & \\
\mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & \mathcal{F}[s^{-1}]
\end{tikzcd}$$

(s est une mono est suffisant, parceque f est une iso ssi

$$\mathrm{Im}(f) \hookrightarrow B$$
$$A \xrightarrow{\Delta} A \times_B A \qquad \text{sont des iso}).$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \mathcal{E}[\mathcal{F}][M(s)^{-1}] \arrow[dll] \\
\mathcal{E}[\mathcal{F}] \arrow[d] & & \\
\mathcal{E} \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[ul, "M"] & \mathcal{F}[s^{-1}] \arrow[uu, dotted]
\end{tikzcd}$$

Comme faire?

Soit $\mathcal{U}$ un topos, et $A \overset{a}{\hookrightarrow} B$ mono. Construire topos $\mathcal{U}'$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U}' \arrow[d, "u"] \\
\mathcal{U}
\end{tikzcd}$$

tel que $u^*(s)$ iso , ~~est~~ et universellement.

s appartienne a une topologie,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{U} & & \mathcal{U}' \arrow[ll, "u"'] \arrow[dl] \\ & \mathcal{U}_j \arrow[ul] & \end{tikzcd}$$

$\mathcal{U}_j$ comp sur $\mathcal{U}'$.

$u^*(s)$ iso $\Leftrightarrow$ $A \underset{s}{\hookrightarrow} B$ est dense pour j

$\Leftrightarrow$

To construct the smallest top j s.t. s is dense

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "\chi_A"] & \Omega \\ A \arrow[u, hook, "s"'] & \end{tikzcd}$$

s est dense pour j $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(\chi_A) \subseteq D_j$

D_j obtenu par pb

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "j"] & \Omega \\ D_j \arrow[u] \arrow[r] \arrow[ur, phantom, "pb"] & 1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

On peut definir un connexion de Galois sur Ω

$$R \hookrightarrow \Omega_1 \times \Omega_2 \qquad (\Omega_1 = \Omega_2)$$
$$(u \to v) = v$$

$T \subset \Omega_1$

$T^\circ = \{ v \mid \forall u \in T \quad R(u,v) \}$

$S \subset \Omega_2$

$S^\circ = \{ u \mid \forall v \in T \quad R(u,v) \}$.

$T^{\circ\circ}$ = plus petite topologie engendree par T.

Quelques calcul!

Le top definir par $Im(\chi_A)$ est $Im(\chi_A)^{\circ\circ} = D_j$ (dense pour classifier)

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E}[\mathcal{F}]_j \\ \mathcal{E}[\mathcal{F}] \arrow[ur, "\nu^*"] \end{tikzcd}$$

est solution.

utiliser ?

Reste a .. cat libre sur graphe

$X \in \mathcal{E}$ Ajouter $\mathcal{E}\left[\begin{smallmatrix} Z \\ \downarrow \\ X \end{smallmatrix}\right]$ (arith un) $= \mathcal{F}$

$\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}\left[\begin{smallmatrix} Z \\ \downarrow \\ X \end{smallmatrix}\right]$

Construire topos du prefaisceaux $\mathcal{E}^{a^{opp}}$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E}\left[\begin{smallmatrix} Z \\ \downarrow \\ X \end{smallmatrix}\right] \arrow[d, dashed] \\ \mathcal{E} \arrow[ur] & \mathcal{E}^{a^{opp}} \arrow[l] \end{tikzcd}$$

topos

Decrire $a^{opp} = M(X)$ (monoide libre sur X). Elements

$[n] \to X$ $\qquad ob(a^{opp}) = M(X)$

$\qquad Mor(a^{..}) = \ldots$

morphismes

$$\begin{tikzcd} {[m]} \arrow[rr] \arrow[dr] & & {[n]} \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

commutatif

Filtering induction limit of such is then just an arbitrary $Z \to X$.

" Plat presheaf on a^{op} $= M(X)^{op} \xrightarrow[\text{left ex.}]{} \mathcal{E}$

Pour classifier $R \hookrightarrow X$, ajouter sous obj generique $Z \rightarrowtail X$; amounts to invert a mono in the $\mathcal{E}\left[\begin{smallmatrix} Z \\ \downarrow \\ X \end{smallmatrix}\right]$ just constructed

Termine la demonstration

Modules plat = prodpts, classifiés par prefaisceaux topos (Diaconescu)

<u>Certaines</u> topos sont exponentiable

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}' & & \mathcal{E}'' \\ & \searrow \; \swarrow & \\ & \mathcal{E} & \end{array}$$

construire $\mathcal{E}''^{\,\mathcal{E}'}$

$\mathcal{B} \overset{D}{\dashrightarrow} \mathcal{A}$ distributeur correspond to

$\mathcal{E}^{\mathcal{B}^{op}} \longleftarrow \mathcal{E}^{\mathcal{A}^{op}}$ provided the distr est exacte

$D(B,A) : \mathcal{B}^{op} \times \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{E}$ Condition a suppl. :

Pour tout B, $D(B,-)$ est exacte a gauche := filtrante :

$$\sum_{A \in ob\mathcal{A}} D(B,A) \twoheadrightarrow 1$$ (notation de Wraith)

filtrante

$$\sum_{C \rightrightarrows A, A'} D(B,C) \twoheadrightarrow D(B,A) \times D(B,A')$$

$$\sum_{C \to A \overset{u}{\underset{v}{\rightrightarrows}} A'} D(B,C) \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}\left(D(B,A) \rightrightarrows D(B,A')\right).$$

Le somme et les epi .. dans language de arithmetique

Donc, (<u>Corollaire</u> : Expon existe pour les topos de prefaisceaux.

<u>Thm</u>

$$\left(\mathcal{E}^{\mathcal{B}^{op}}\right)^{\left(\mathcal{E}^{\mathcal{A}^{op}}\right)}$$ existe

C'est une topos de Groth, mais non de prefaisceaux

Introduire topologie sur $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$. Examiner continuité du distribu

$$\mathcal{B} \xrightarrow{D} \mathcal{A}$$

dans lang. du univ arithm.

$D(-,A)$ faisceau pour toute A fixe

Donne par une certain egalisateur

$$D(-,-) \to \prod \rightrightarrows \prod$$

Dans lang. ~~est du~~ arithm. seulement si les produit sont finis

Voir que, si le top. sur $\mathcal{B}$ est loc. finies , $\mathcal{B}$ est exponentiable. En particulier, le top triviale est fini.
Topos coherent sont donc exponentiable. =
Topos engendre par pretopos

Un obj tres inter est l'espace de Sierpinski. $I = \circ\!\to\!\circ$
Classifie les sous obj ~~du~~ ouvertes

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{E}^{I^{op}} \arrow[d] \\ \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "f"] & \mathcal{E} \end{tikzcd}$$

donner f est equivalent a donner une ouvert de $1_{\mathcal{F}}$.

I unit interval (sheaves on Sierpinski space)

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \times_{\mathcal{E}} I \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathcal{G} \arrow[dl] \\ & \mathcal{E} & \end{tikzcd}$$

meme chose que une transf naturelle $\mathcal{F} \overset{I}{\rightrightarrows} \mathcal{G}$
I est exponentiable :

$$\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{G}^{I}$$

g^{I} Theorie de morphisme de g-structure ?

Complexe simplicial tronqué du topos

$$\mathcal{E}_2 \equiv \mathcal{E}_1 \rightrightarrows \mathcal{E}$$

Real. geometrique

$$\mathcal{E}^{\Delta_2} \equiv \mathcal{E}^{\Delta_1} = \mathcal{E}$$

Existence de structure generique.

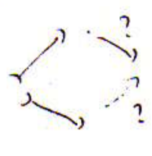
Theorie speciale e.g. Kock : $\mathbb{Z}, R$ est non seulement anneau local, mais corps.

$\mathcal{A}$ ~~a~~ cat with monos, and with 1 ~~bag~~

~~1) mono~~ Exemple : cat des ensembles tot. ordonnes dense

ou, cat des corps.

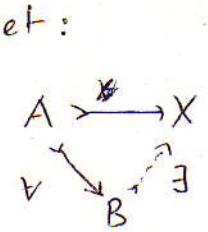
Amalgamation



[[exple for generic $\mathcal{A}$]]

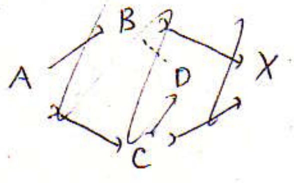
Ajoute X : $\mathcal{A} \sqcup X$, et telle que pour toute $A \in \mathcal{A}$

$\exists\, A \rightarrowtail X$, et :

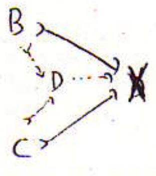


;

et



trouve D :



(ie X est filtrante)

Les nombre rationelle dans cat du ensemble finu tot ord

is a such.

Peut introduire tel X universelle

$$\mathcal{E} \twoheadleftarrow \mathcal{E}[X]$$ geometrique.

est logique

Si .. consistent , aussi obj .. consistente.

Resultat logique obtenu par theorie topos.